Dérivation du bruit de Johnson-Nyquist

Le bruit thermique ou de Johnson-Nyquist or thermal noise est dû au mouvement aléatoire des porteurs de charges induit par les fluctuations thermiques. Dans un conducteur unidimensionnel, le principe d'équipartition de l'énergie nous permet de trouver l'énergie cinétique due à ce mouvement en fonction de la température T :

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}k_B T$$

m est la masse de l'électron, $\overline{v^2}$ est la moyenne de la vitesse au carré et $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$est la constante de Boltzmann.

Dans un conducteur 1D de longueur l, comme par exemple une jonction tunnel, le courant en fonction du temps est donné par:

$$I(t) = \frac{q\overline{v(t)}}{l}$$

q est la charge électronique. Cette relation nous permet de trouver l'autocorrélation de I en fonction de celle de la vitesse v:

$$< I(t)I(t+t') > = \frac{q^2 < \overline{v(t)}\,\overline{v(t+t')} >}{l^2}$$

Hypothèses de Drude: 1. Les électrons n'interagissent pas entre eux.

2. Leur mouvement est uniquement influer par les diffusions élastiques

Le temps moyen τ entre deux diffusions nous permet de définir la loi de probabilité de diffusion:

$$\wp \sim e^{-t/\tau}$$

On trouve alors la dépendance en temps de l'autocorrélation de v

$$< \overline{v(t)}\,\overline{v(t+t')} > = \overline{v^2} e^{-t/\tau}$$

Qualitativement, cette équation montre que la vitesse de-corrèle exponentiellement de sa valeur initiale à t.

L'autocorrélation du courant est alors donnée par l'équation suivante :

$$< I(t)I(t+t') > = \frac{q^2\overline{v^2}e^{-t/\tau}}{l^2}$$

Le principe d'équipartition nous permet d'écrire l'autocorrélation en fonction de la température :

$$< I(t)I(t+t') > = \frac{q^2 k_B T}{ml^2} e^{-t/\tau}$$

Pour un flux continu de N électrons, on a

$$< I(t)I(t+t') > = \frac{Nq^2 k_B T}{ml^2} e^{-t/\tau} = \frac{(nAl)q^2 k_B T}{ml^2} e^{-t/\tau}$$

Dans cette expression on a remplacé N par nAl où n est la densité de porteur par unité de volume, A est l'aire de la section du conducteur perpendiculaire au mouvement des et l sa longueur. En simplifiant, on trouve:

$$< I(t)I(t+t') > = \frac{nAq^2k_BT}{ml}e^{-t/\tau}$$

Par définition, la densité spectrale du bruit de courant S_I est:

$$S_I = 2\mathcal{F}\{< I(t)I(t+t') >\}$$

$\mathcal{F}\{< I(t)I(t+t') >\}$ est la transformée de Fourier de l'autocorrélation.

$$S_I = \frac{2nAq^2k_BT}{ml}\mathcal{F}\{e^{-t/\tau}\}$$

$$S_I = \frac{2nAq^2k_BT}{ml}\frac{2\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

Dans un conducteur, τ est typiquement de l'ordre de 1 picoseconde. La fréquence de mesure ω est typiquement inférieure à 1GHz. $\omega^2\tau^2 < 10^{-6}$. Ce terme est donc négligeable. D'où :

$$S_I = \frac{4nAq^2k_BT}{ml}\tau$$

La conductivité d'un matériau dans le modèle de Drude est:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$$

S_I est alors exprimé en fonction de la conductivité :

$$S_I = 4k_BT\frac{A\sigma}{l}.$$

$$\frac{A\sigma}{l} = \frac{1}{R}$$

R est la résistance électrique du conducteur. On arrive finalement à une expression de S_I en fonction de variables expérimentales qui sont relativement facile à déterminer :

$$S_I = \frac{4k_BT}{R}$$

La densité spectrale de bruit de tension S_V due au bruit de Johnson-Nyquist, est calculée en multipliant S_I par R^2:

$$S_V = 4k_BTR$$

Autres types de bruits

Le bruit *1/f* et le bruit de génération recombinaison sont des types de bruit qui dominent à basse fréquence. Ils sont dus aux imperfections et aux défauts du matériau. D'autres types de bruit sont plus particuliers à certains dispositifs ou certains cas plus spécifiques comme le bruit en $1/f^2$, le bruit d'avalanche et le bruit en créneau.

La démonstration et la compréhension du bruit de grenaille fera partie du rapport à soumettre à la fin de ce projet expérimental.